January 13

一　单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的，请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

1. 直线 $\sqrt{3}x+y-1=0$ 的倾斜角为 (　　)

A. 60°　　B. 120°　　C. 135°　　D. 150°

2. 抛物线 $C: y=2x^2$ 的准线方程为 (　　)

A. $x=-1$　　B. $x=-\dfrac{1}{2}$　　C. $y=-\dfrac{1}{4}$　　D. $y=-\dfrac{1}{8}$

3. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1\cdot a_5=64, a_1+a_3=10, S_n=254$, 则 $n=$ (　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

4. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1(m>0,n<0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$，则该双曲线的离心率为 (　　)

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

5. 在三棱锥 $A-BCD$ 中，点 E,F 分别是 AD,BC 的中点，点 M 为线段 EF 上靠近 F 的三等分点，若记 $\overrightarrow{AB}=a,\overrightarrow{AC}=b,\overrightarrow{AD}=c$，则 $\overrightarrow{AM}=$ (　　)

A. $\dfrac{1}{6}a+\dfrac{1}{6}b+\dfrac{1}{6}c$　　B. $\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{3}b+\dfrac{1}{3}c$　　C. $\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{3}b+\dfrac{1}{6}c$　　D. $\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{6}b+\dfrac{1}{6}c$

6. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$，其前 n 项的积为 Π_n，则 $\Pi_{2025}=$ (　　)

A. 2　　B. -6　　C. -3　　D. 1

7. 已知 P 是直线 $l: x-y+6=0$ 上一动点，过点 P 作圆 $C: x^2+y^2-4x=0$ 的两条切线，切点分别为 A,B，则四边形 $PACB$ 周长的最小值为 (　　)

A. $2+2\sqrt{7}$　　B. $4+4\sqrt{7}$　　C. $4+2\sqrt{7}$　　D. 8

8. 在边长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为 BC,AA_1 的中点，P,Q 分别为线段 D_1A_1,C_1D_1 上的动点（不包括端点）满足 $EP\perp FQ$，则线段 PQ 的长度最小值为 (　　)

A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{2}$

二 多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分分，有选错的得 0 分。

9. 已知空间向量 $a=(2,-1,1), b=(1,2,3)$，则下列结论正确的是 ( )

A. $c=(3,2,5)$ 与 a,b 共面

B. $|a+b|=26$

C. a 在 b 上的投影向量为 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{6},\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$

D. a 与 b 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{14}$

10. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_7>S_9>S_8$，下列说法正确的是 ( )

A. $d<0$

B. 数列 $\{S_n\}$ 的最小项为 S_8

C. $|a_8|>|a_9|$

D. 能使 $S_n<0$ 时 n 的最大值为 15

11. 椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{m^2}=1(m>0)$ 的两个焦点分别为 F_1,F_2，则下列说法正确的是 ( )

A. 若 $0<m<1$，过点 F_2 的直线与椭圆 C 交于 A,B 两点，则 $\triangle ABF_1$ 的周长为 16

B. 若直线 $kx-y-2=0$ 与 C 恒有公共点，则 m 的取值范围为 $[2,+\infty)$

C. 若 C 上存在点 P，使得 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则 m 的取值范围为 $(0,2\sqrt{2}]\cup[4\sqrt{2},+\infty)$

D. 若 $m=\sqrt{7}, P$ 为 C 上一点，$Q(1,1), F_1$ 为左焦点，则 $|PF_1|+|PQ|$ 的最小值为 $8-\sqrt{5}$

三 填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分

12. 已知 $a=(2,-1,2), b=(-4,2,x)$，且 $a\perp b$，则 $x=$______。

13. 一条光线从一点 $P(6,4)$ 射出，与 x 轴相交于一点 $Q(4,0)$，经 x 轴反射，求反射光线所在的直线方程______。

14. 意大利数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时，发现有这样一列数: 1, 1, 2, 3, 5, $\cdots$，其中从第三项起，每个数等于它前面两个数的和，即 $a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$。后来人们把这样的一列数组成的数列 $\{a_n\}$ 称为“斐波那契数列”。记 S_n 为“斐波那契数列”$\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_{2024}=p, a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{2025}^2=q$，则 $a_{2025}=$______。(结果用 p,q 表示)

四 解答题：本题共 5 小题，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

15. 已知圆心为 C 的圆经过 $A(-1,-1), B(-2,2)$ 两点，且圆心 C 在直线 $l: x-y-1=0$ 上。

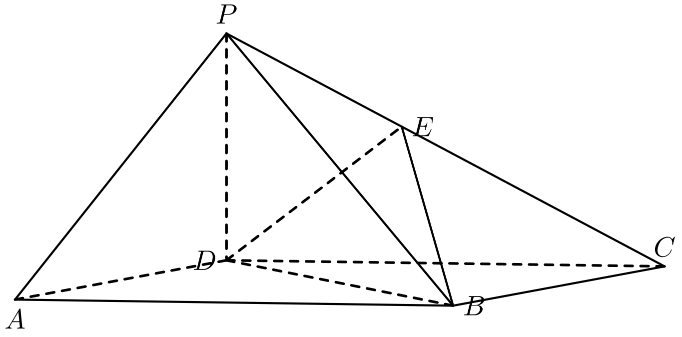
1. 求圆 C 的标准方程；
2. 过点 $M(0,3)$ 的直线 l' 被圆 C 截得的弦长为 8，求直线 l' 的方程。

16. 已知抛物线 $y^2 = 2px(p>0)$ 上的点 $A(x,y)$ 与抛物线焦点 F 的距离为 3，点 A 到 x 轴的距离为 $\sqrt{2p}$。

1. 求抛物线的方程；
2. 若点 A 在第一象限，则经过抛物线焦点 F 和点 A 的直线交抛物线于点 B，经过点 A 和抛物线顶点的直线交抛物线的准线于点 D，求证：直线 BD 平行于抛物线的对称轴。

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$AB=4, BD=2\sqrt{3}, PD=AD=2$，侧棱 PD 上底面 $ABCD$，点 E 在线段 PC 上运动。

1. 证明：AD 上平面 PBD；
2. 若平面 PBD 与平面 BDE 的夹角为 $45°$，试确定点 E 的位置。



18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} = S_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$。

1. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
2. 在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数，使这 $n+2$ 个数组成一个公差为 d_n 的等差数列。
   (a) 记 $b_n = \dfrac{1}{d_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 b_n
   (b) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n

19. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于任意一点 $P(x,y)$，总存在一个点 $Q(x',y')$ 满足关系式 $\varphi:\begin{cases}x'=\lambda x,\\ y'=\mu y,\end{cases}$ $(\lambda>0,\mu>0)$，则称 φ 为平面直角坐标系中的伸缩变换。

1. 在同一直角坐标系中，求平面直角坐标系中的伸缩变换 φ_1，使得圆 $x^2+y^2=8$ 变换为椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$；
2. 已知曲线 E_1 经过平面直角坐标系中的伸缩变换 $\varphi_2:\begin{cases}x'=2x,\\ y'=y\end{cases}$ 得到的曲线是 $E_2:\dfrac{x^2}{16}-y^2=1$，且 E_1 与 x 轴有 A,B 两个交点（A 在 B 的左侧），过点 $(4,0)$ 且斜率为 k 的直线 l 与 E_1 在 y 轴右侧有 H,K 两个交点。
   (a) 求 k 的取值范围；
   (b) 若直线 AH,BH,BK 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3，证明：$k_2(k_1+k_3)$ 为定值。